



Cours 24 – 11/12/2024

10. La dynamique du solide indéformable

10.5. Théorème de Steiner

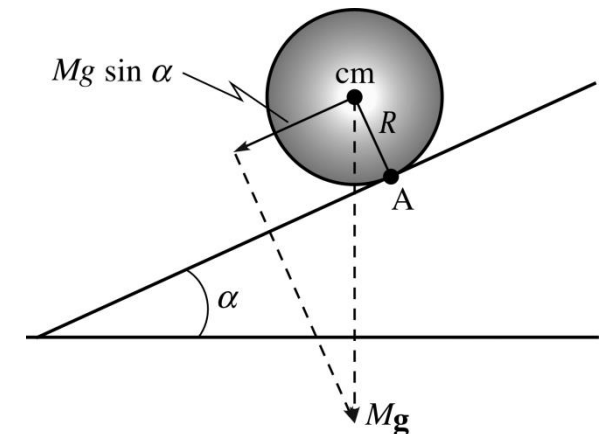
10.6. Théorème du moment cinétique pour un solide

10.7. Tenseur d'inertie

11. Applications du solide indéformable

11.1. Conditions d'équilibre

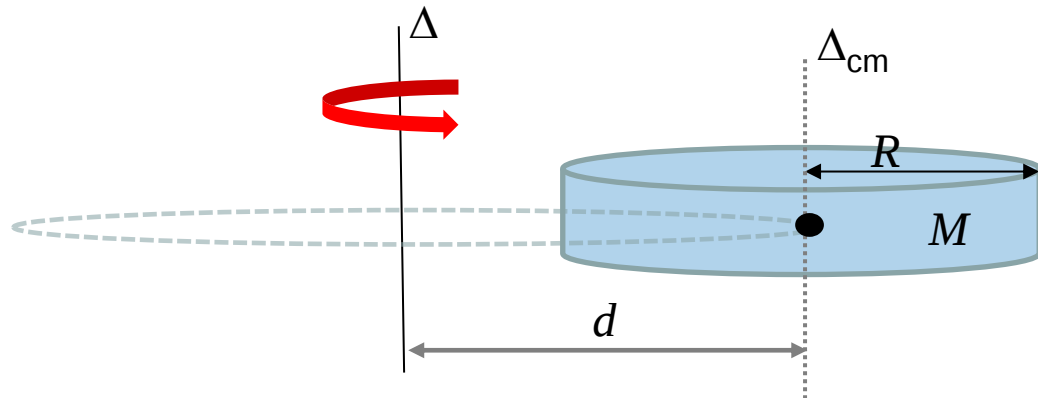
11.2. Mise en rotation d'un solide



10.5. Théorème de Steiner



■ Moment d'inertie pour une rotation d'un objet autour d'un axe ne passant pas par le centre de masse



Moment d'inertie pour une rotation autour de Δ_{cm} :

$$I_{\Delta,cm} = \frac{1}{2}MR^2$$

Attention : dans cet exemple, le disque tourne à la distance d autour de l'axe Δ . Le moment d'inertie I_{Δ} autour de l'axe Δ ne correspond pas au moment d'inertie $I_{\Delta,cm}$ pour une rotation autour d'un axe Δ_{cm} passant par le centre de masse.

Moment d'inertie I_{Δ} pour une rotation autour de Δ ?

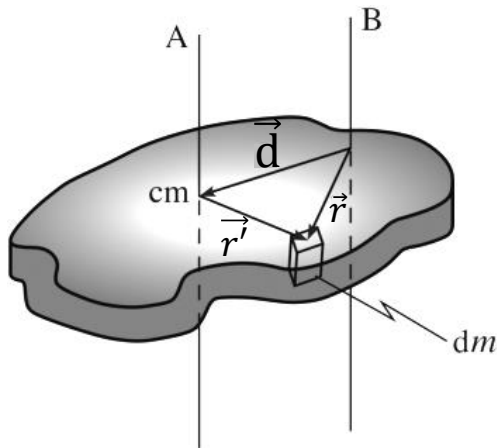
10.5. Théorème de Steiner



Le moment d'inertie I d'un solide de masse M pour une rotation autour d'un axe B, qui est parallèle et à la distance d de l'axe A passant par le cm, est donné par la relation suivante :

$$I = I_{cm} + Md^2$$

avec I_{cm} moment d'inertie du solide pour une rotation autour de l'axe A passant par le centre de masse



Théorème de Steiner
(ou Théorème de Huygens-Steiner)



Huygens
1629 - 1695



Steiner
1796 - 1863

Exemples :

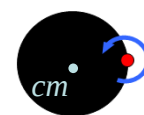


$$I = I_{cm}$$

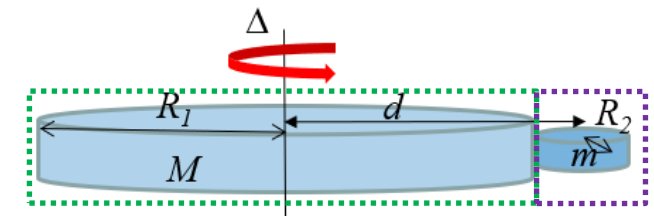


$$I = I_{cm} + M \left(\frac{R}{2} \right)^2$$

• axe de rotation

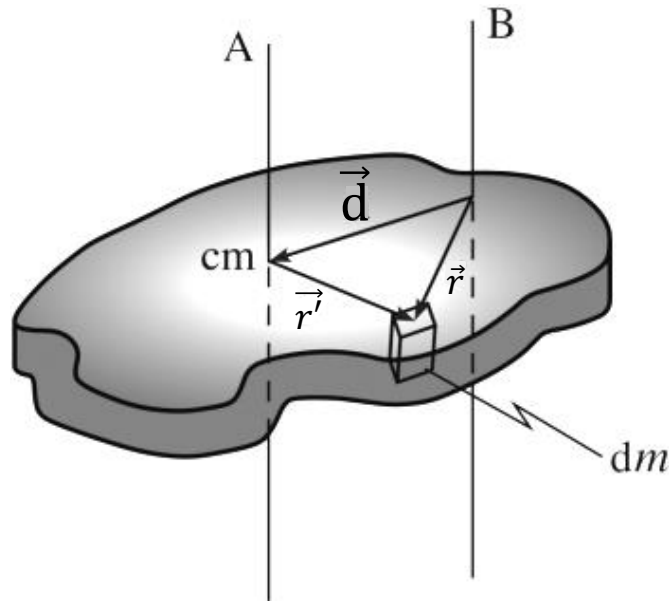


$$I = I_{cm} + MR^2$$



$$I_{total} = \left[\frac{1}{2} MR_1^2 \right] + \left[\frac{1}{2} mR_2^2 + md^2 \right]$$

10.5. Théorème de Steiner



Démonstration :

- On suppose que l'on connaît I_{cm} , le moment d'inertie pour une rotation autour de l'axe A passant par le cm et parallèle à l'axe B
- L'axe B est à la distance d de l'axe A

$$I_B = \int_V r^2 dm = \int_V \vec{r}^2 dm = \int_V (\vec{d} + \vec{r}')^2 dm = d^2 \int_V dm + 2\vec{d} \cdot \int_V \vec{r}' dm + \int_V \vec{r}'^2 dm$$

10.6. Théorème du moment cinétique pour un solide



■ Généralisation pour un point quelconque

Soit le moment cinétique d'un solide calculé par rapport à A, qui est un point en translation :

$$\begin{aligned}\vec{L}_A &= \int_V \vec{AP} \times \vec{v} dm = \int_V (\vec{AO} + \vec{OP}) \times \vec{v} dm \quad \text{note : on calcule } \vec{L}_A \text{ sur l'ensemble des points } P \text{ qui forment le solide de volume } V \text{ (de masse } M\text{)} \\ &= \int_V \vec{AO} \times \vec{v} dm + \int_V \vec{OP} \times \vec{v} dm = \vec{AO} \times \int_V \vec{v} dm + \vec{L}_O \\ &\quad \text{moment cinétique calculé par rapport à } O\end{aligned}$$

$$\vec{L}_A = \vec{AO} \times \vec{p} + \vec{L}_O$$

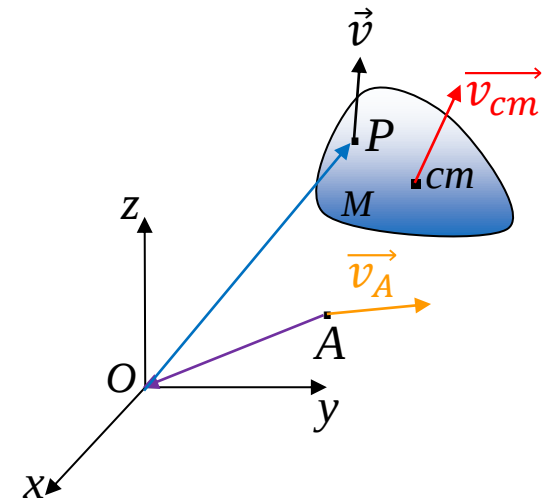
avec $\vec{p} = M\vec{v}_{cm}$ quantité de mouvement du solide

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{AO} \times \vec{p} + \vec{AO} \times \frac{d}{dt} \vec{p} + \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -\vec{v}_A \times M\vec{v}_{cm} + \vec{AO} \times \sum_i \vec{F}_{ext,i} + \sum_i \vec{OP} \times \vec{F}_{ext,i}$$

Att : il faut faire la somme sur l'ensemble des points P du solide

$$\sum_i (\vec{AO} + \vec{OP}) \times \vec{F}_{ext,i} = \sum_i \vec{AP} \times \vec{F}_{ext,i} = \vec{\mathcal{M}}_A \quad \text{moment de force calculé par rapport à } A$$



$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} + M \vec{v}_A \times \vec{v}_{cm} = \vec{\mathcal{M}}_A$$

Si A fixe dans le référentiel

Si A est le centre de masse

Si $\vec{v}_A$ colinéaire à $\vec{v}_{cm}$

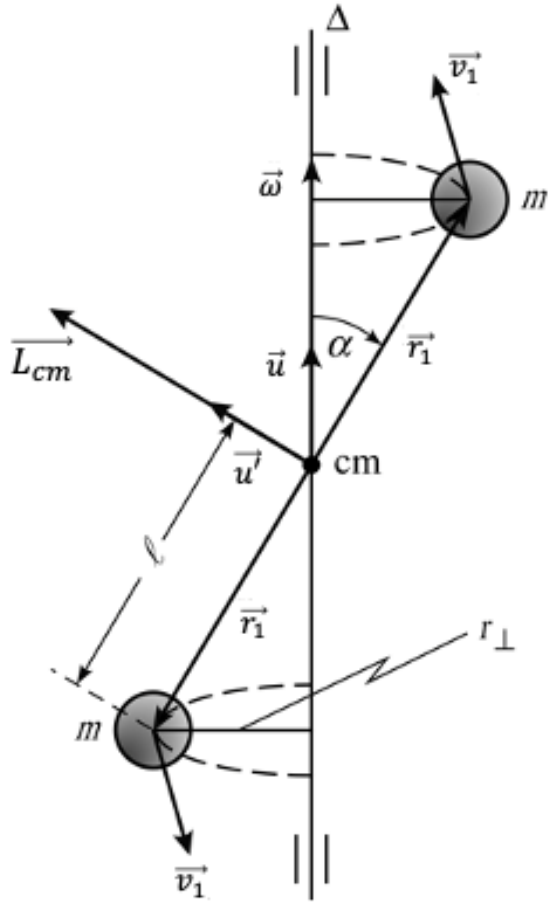


$$\vec{v}_A \times \vec{v}_{cm} = \vec{0}$$



10.7. Tenseur d'inertie

■ Définition du «tenseur»



Dans le cas de l'haltère incliné $\vec{L}$ n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$.

Il faut alors trouver une relation entre $\vec{L}$ et $\vec{\omega}$.

Ceci est possible avec un nouvel objet mathématique.

Cet objet mathématique est un tenseur, représenté par une matrice (3x3)

On note le tenseur d'inertie I



10.7. Tenseur d'inertie

■ Définition du «tenseur»

Nous cherchons une relation du type

$$\vec{L} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} \vec{\omega} \quad \text{où}$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Composantes du vecteur
moment cinétique

Tenseur d'inertie

Composantes du vecteur
vitesse angulaire

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & - \int xy dm & - \int xz dm \\ - \int yx dm & \int (x^2 + z^2) dm & - \int yz dm \\ - \int zx dm & - \int zy dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix}$$

Cette matrice est le tenseur d'inertie, noté $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$



10.7. Tenseur d'inertie

■ Moment d'inertie et Tenseur d'inertie

Pour un axe principal de rotation d'un solide, nous avons constaté que $\vec{L}$ et $\vec{\omega}$ sont parallèles. Dans ce cas, ils sont reliés par un scalaire I , le moment d'inertie :

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Si le moment cinétique L n'est pas colinéaire à $\vec{\omega}$, alors on écrit

$$\vec{L} = \underline{\underline{I}} \vec{\omega}$$

avec $\underline{\underline{I}}$ le tenseur d'inertie du solide



Dynamique du solide - résumé

Dans un référentiel galiléen, et avec O un point fixe de ce référentiel, nous avons les relations suivantes pour un solide indéformable de masse M :

2nd loi de Newton appliquée au centre de masse :

$$M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext,i} = \vec{F}_{ext} \quad \vec{F}_{ext} \text{ résultante des forces extérieures agissant sur le système}$$

Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{O,ext,i} = \vec{\mathcal{M}}_{O,ext} \quad \vec{\mathcal{M}}_{O,ext} \text{ résultante des moments des forces extérieures}$$

Dans le cas d'une rotation autour d'un axe principal d'inertie : $\vec{L} = I\vec{\omega}$

Moment d'inertie par rapport à l'axe Δ passant par le cm : $I = \int_V r_{\perp}^2 dm$

Théorème de Steiner : $I = I_{cm} + Md^2$

Energie cinétique de rotation : $E_{cin} = \frac{1}{2} I_{cm,\Delta} \omega^2$
pour une rotation autour d'un axe passant par le cm



11. Applications du solide indéformable

11.1. Conditions d'équilibre

11.2. Mise en rotation d'un solide



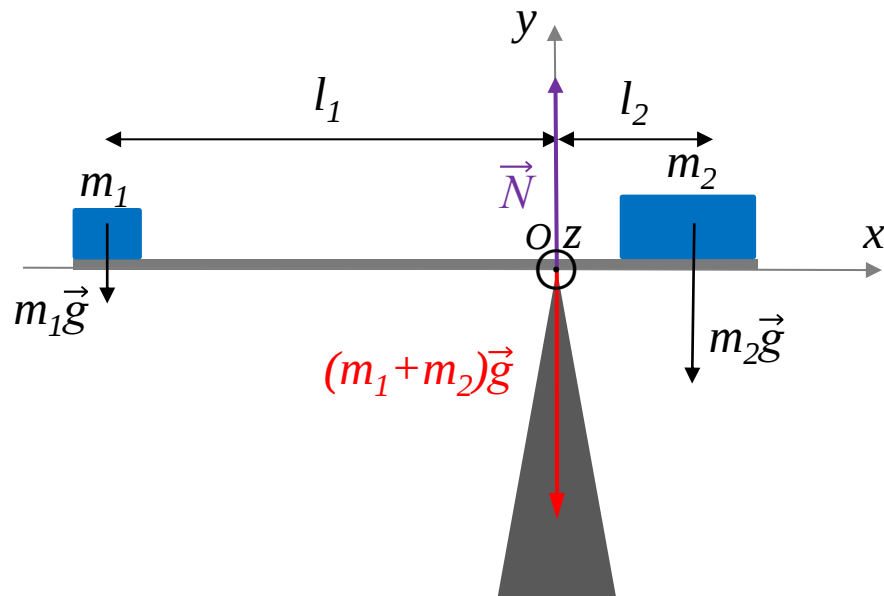
11.1. Conditions d'équilibre



■ Conditions d'équilibre pour un solide

$$M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext,i} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{O,ext,i} = \vec{0}$$

Exemple : équilibre d'une barre (sans masse) avec deux masses à chaque extrémité



$$\sum \vec{F}_{ext,i} = \vec{0} \quad \text{projection sur } \vec{e}_y : N - (m_1 + m_2)g = 0$$

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_{O,ext,i} = \vec{0} \Rightarrow l_2 \vec{e}_x \times (-m_2 g \vec{e}_y) + (-l_1 \vec{e}_x) \times (-m_1 g \vec{e}_y) = \vec{0}$$
$$-l_2 m_2 g \vec{e}_z + l_1 m_1 g \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\text{projection sur } \vec{e}_z : -l_2 m_2 g + l_1 m_1 g = 0$$

$$\text{finalement} \quad l_2 = l_1 \frac{m_1}{m_2}$$

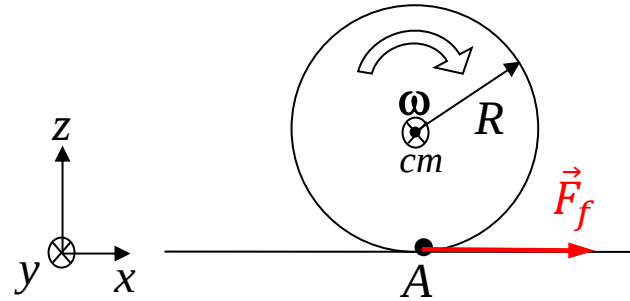
11.2. Mise en rotation d'un solide



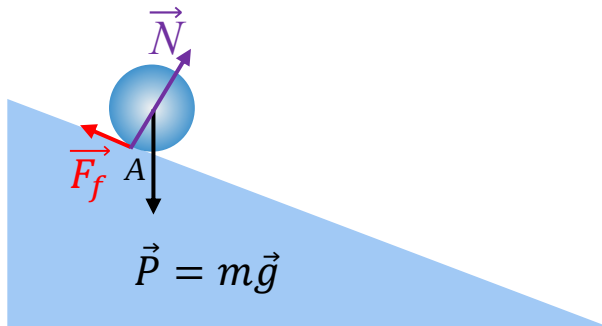
■ Roulement sans glissement - rappel

La force de frottement sec entre la roue et le sol est responsable du roulement sans glissement

⇒ La vitesse d'un point de la roue au moment du contact avec le sol (en A) est nulle



La condition de roulement sans glissement est $\vec{v}_A = \vec{0}$ ce qui conduit à $\vec{v}_{cm} = \omega R \vec{e}_x$



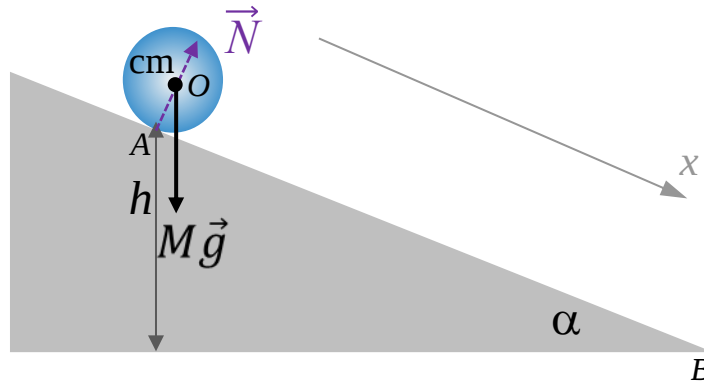
La force de frottement est responsable de la mise en rotation d'une roue sur un plan incliné. S'il n'y avait pas de frottement, elle glisserait sans tourner.

11.2. Mise en rotation d'un solide



■ Rôle du frottement et mise en rotation d'une roue

S'il n'y a pas de force de frottement sec $\Rightarrow$ la roue glisse sans mise en rotation



Démonstration :

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \sum_i \vec{r}_{cm,i} \times \vec{F}_{ext,i} = \vec{0} \times M\vec{g} + \vec{OA} \times \vec{N} = \vec{0}$$

La dérivée du moment cinétique est nulle : il n'y a pas de mise en rotation.

$\Rightarrow$ La mise en rotation nécessite un moment de force, et donc une force de frottement au point de contact.

Accélération de la bille : on applique la 2nd loi de Newton au centre de masse de la roue

$$M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M \vec{a}_{glissement} = \sum \vec{F}_{ext,i} \rightarrow a_{glissement} = g \sin \alpha$$

Vitesse de la bille en bas du plan incliné : on applique le principe de conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{array}{l} \text{Etat initial en A: } Mgh \\ \text{Etat final en B: } \frac{1}{2}Mv^2 \end{array} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

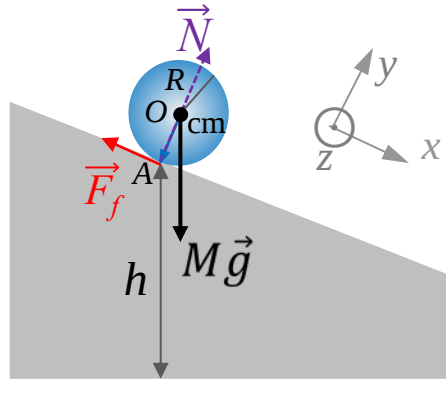
Aucune différence avec la mécanique du point matériel

11.2. Mise en rotation d'un solide



■ Accélération d'une roue qui roule sans glisser sur un plan incliné

Force de frottement sec $\Rightarrow$ à l'origine de la mise en rotation en s'opposant au glissement.



$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{cm,ext,i} \rightarrow \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{0} \times M\vec{g} + \vec{OA} \times \vec{N} + \vec{OA} \times \vec{F}_f = -RF_f\vec{e}_z$$

- La mise en rotation ($|\frac{dL_{cm}}{dt}| > 0$) est due **au moment de la force de frottement statique F_f qui s'exerce au point A.**
- Le moment cinétique augmente selon $-\vec{e}_z$, ce qui correspond au roulement de la bille vers le bas.

Remarque : la vitesse est nulle au point de contact où s'exerce le frottement. Celle-ci ne travaille donc pas ($\delta W = F_f dl = F_f v_A dt = 0$). Il n'y a pas de dissipation d'énergie.

La vitesse de la roue en bas du plan incliné est déterminée par la conservation de l'énergie mécanique :

$$\begin{array}{l} \text{En A: } Mgh \\ \text{En B: } \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 \end{array} \Rightarrow v = \sqrt{2gh - \frac{I_{cm}\omega^2}{M}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I_{cm}/MR^2}}$$

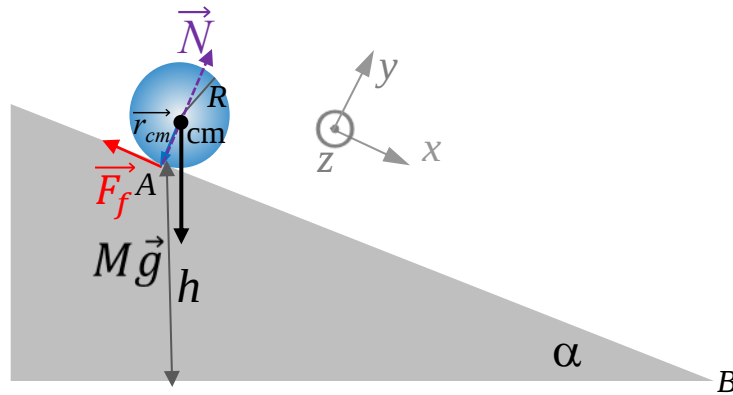
avec ω la vitesse de rotation de la bille, et I_{cm} son moment d'inertie et $v = \omega R$

La vitesse est plus faible que celle déterminée pour le cas sans frottement car une partie de l'énergie potentielle a été convertie en énergie cinétique de rotation.

11.2. Mise en rotation d'un solide



■ Accélération d'une roue qui roule sans glisser sur un plan incliné



La vitesse en B est plus faible dans le cas d'un roulement sans glissement, par rapport au cas sans frottement, donc l'accélération du centre de masse est aussi plus faible.

$$a_{\text{roulement}} < a_{\text{glissement}}$$

Calcul de l'accélération du centre de masse :

Pour calculer l'accélération du centre masse nous utilisons deux lois essentielles

- 2nd loi de Newton appliquée au cm :

$$M\overrightarrow{a_{cm}} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f$$

- Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\overrightarrow{L_{cm}}}{dt} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_f = -RF_f\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{L_{cm}} = I_{cm} \vec{\omega}$$

11.2. Mise en rotation d'un solide

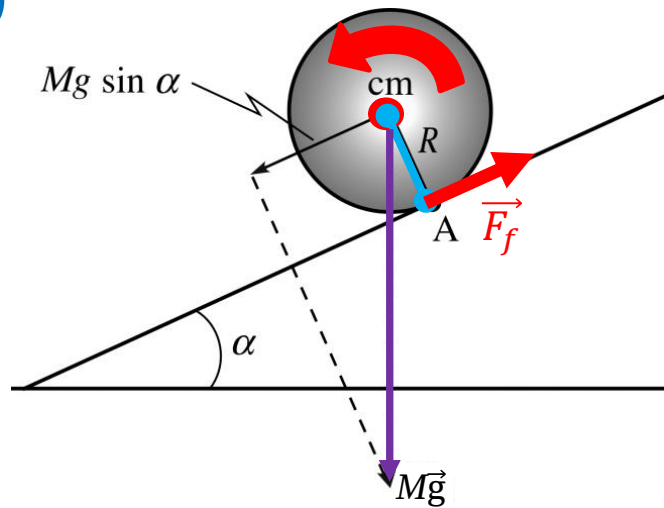


■ Accélération d'une roue qui roule sans glisser sur un plan incliné

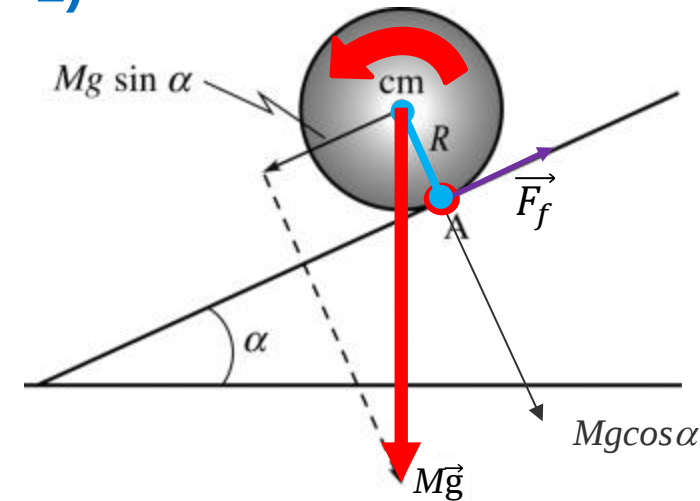
Remarque : la rotation d'un cylindre sur un plan incliné peut être traitée de deux façons différentes.

- 1) Rotation autour d'un axe passant par son centre de masse (calcul précédent)
- 2) Rotation autour d'un axe passant par le point de contact A (on applique dans ce cas le théorème de Steiner)

1)



2)

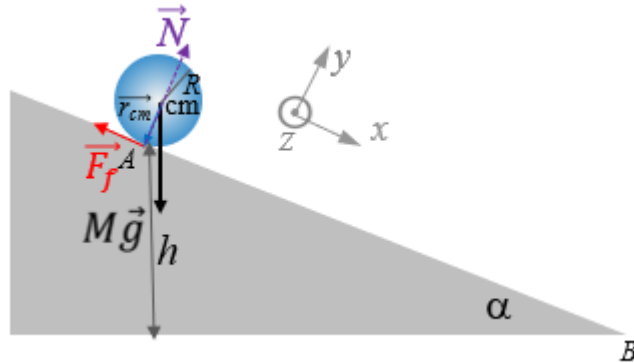


Rotation autour d'un axe passant par A : on applique Steiner pour calculer le moment d'inertie

● : axe de rotation considéré

11.2. Mise en rotation d'un solide

■ Accélération d'une roue qui roule sans glisser sur un plan incliné



Calcul de l'accélération du centre de masse :

Pour un roulement sans glissement, la vitesse du centre de masse est

$$\vec{v}_{cm} = \omega R \vec{e}_x \Rightarrow \vec{a}_{cm} = R \dot{\omega} \vec{e}_x$$

On projette sur $\vec{e}_x$: $a_{cm} = R \dot{\omega}$

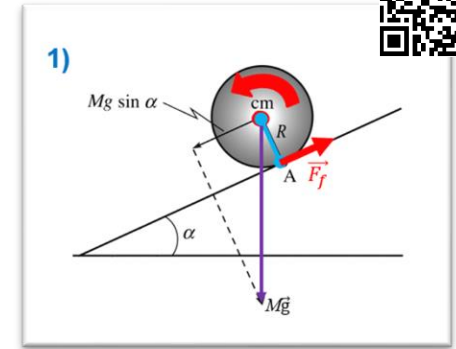
$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_f = -R F_f \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = -I_{cm} \dot{\omega} \vec{e}_z \quad \text{car} \quad \vec{L}_{cm} = I_{cm} \vec{\omega} = -I_{cm} \omega \vec{e}_z$$

$$\text{On projette sur } \vec{e}_z: \frac{dL_{cm}}{dt} = -R F_f = -I_{cm} \dot{\omega} \Rightarrow F_f = \frac{I_{cm} \dot{\omega}}{R} = \frac{I_{cm} a_{cm}}{R^2}$$

$$\text{2nd loi de Newton projetée sur } Ox: M a_{cm} = M g \sin \alpha - F_f \Rightarrow M a_{cm} = M g \sin \alpha - \frac{I_{cm} a_{cm}}{R^2}$$

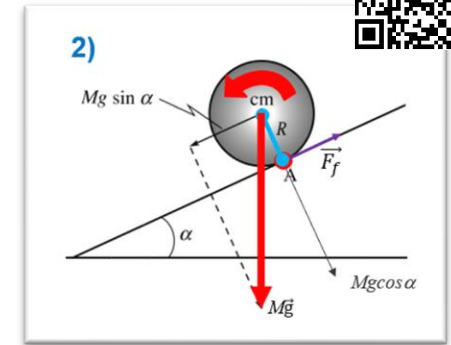
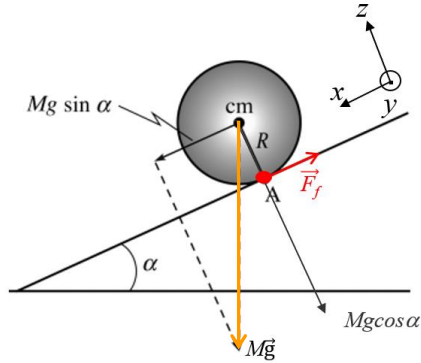
Finalement

$$a_{cm} = \frac{g \sin \alpha}{\left(1 + \frac{I_{cm}}{M R^2}\right)}$$



11.2. Mise en rotation d'un solide

■ Accélération d'une roue qui roule sans glisser sur un plan incliné



a) Calculez $\frac{d\vec{L}_A}{dt}$ en fonction de R, M, g, α

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A = R\vec{e}_z \times M\vec{g} + \vec{0} \times \vec{F}_f = RMg \sin \alpha \vec{e}_y$$

b) Exprimez $\vec{L}_A$ en fonction de $\vec{\omega}$

$$\vec{L}_A = I_A \vec{\omega}$$

c) Exprimez $\dot{\omega}$ en fonction de R, M, g, α et I_A

En projetant sur $\vec{e}_y$: $\dot{\omega} = \frac{\dot{L}_A}{I_A} = \frac{RMg \sin \alpha}{I_A}$

d) Exprimez I_A en fonction de M et R

$$I_A = I_{cm} + MR^2$$

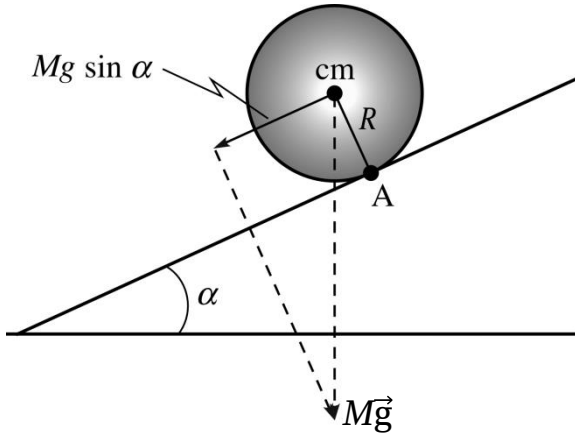
e) Quelle est l'accélération a suivant le plan incliné ?

$$a = R\dot{\omega} \Rightarrow a = \frac{R^2 Mg \sin \alpha}{I_{cm} + MR^2} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_{cm}}{MR^2}}$$

11.2. Mise en rotation d'un solide



■ Accélération d'une roue qui roule sans glisser sur un plan incliné



L'accélération est plus faible lorsque le cylindre (ou la sphère) roule au lieu de glisser (sans frottement).

⇒ Ceci est dû au moment d'inertie qui s'oppose à l'accélération angulaire.

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_{cm}}{MR^2}}$$

Soient un cylindre plein, un cylindre creux, et une sphère pleine, avec le même rayon R et la même masse M . Ils sont lâchés sans vitesse sur un plan incliné. L'accélération dépend de leur moment d'inertie :

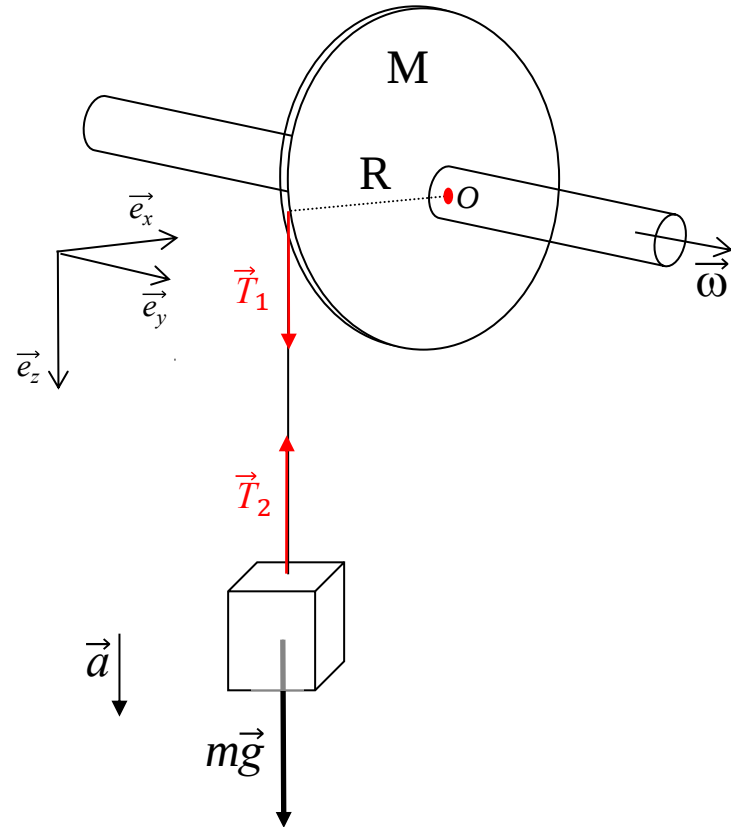
1. sphère $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2 \Rightarrow a = \frac{5}{7}g \sin \alpha$
2. cylindre plein $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}g \sin \alpha$
3. cylindre creux $I_{cm} = MR^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}g \sin \alpha$

11.2. Mise en rotation d'un solide



■ Accélération d'une masse m avec poulie de moment d'inertie $I = \frac{1}{2} MR^2$

Le fil est enroulé autour de la poulie. La masse m descend sous l'effet du poids et la poulie de masse M se met à tourner.



3^{ème} Loi de Newton sur la masse m : $T_1 = T_2 = T$
projection sur Oz

2^{nde} Loi de Newton : $m\vec{a} = mg\vec{e}_z - T\vec{e}_z \Leftrightarrow ma = mg - T$

Moment cinétique appliqué sur la poulie en O :

$$\vec{L}_O = I \vec{\omega} = I\omega\vec{e}_y \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{O,F_{ext}} = -R\vec{e}_x \times T\vec{e}_z = RT\vec{e}_y$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = RT\vec{e}_y \quad \text{projection sur Oy} \quad \Leftrightarrow \frac{dL_O}{dt} = RT = I\dot{\omega} \Rightarrow T = I\frac{\dot{\omega}}{R}$$

$$\text{d'où } ma = mg - T = mg - I\frac{\dot{\omega}}{R} = mg - \frac{1}{2}MR^2\frac{\dot{\omega}}{R} = mg - \frac{1}{2}Ma$$

avec $I = \frac{1}{2}MR^2$ car $a = R\dot{\omega}$

L' accélération est

$$a = \frac{mg}{m + \frac{1}{2}M}$$